

Géométries des groupes d'automorphismes extérieurs

Introduction au Domaine de Recherche

Adrien ABGRALL

27 mai 2022

1 Aperçu historique

L'apparition des groupes en géométrie est presque aussi vieille que le concept de groupe lui-même, que ce soit avec le programme d'Erlangen dû à Klein en 1872 ou les travaux de Poincaré sur le groupe fondamental et les groupes d'homologie un peu plus tard. Il est déjà clair à l'époque que l'action d'un groupe sur un espace topologique apporte des informations riches sur la structure à la fois du groupe et de l'espace. Il est surprenant à ce titre que la *théorie géométrique des groupes* ne soit considérée comme un domaine à part entière qu'à partir des années 1980, suite aux travaux de Gromov et Thurston notamment, mais cette théorie trouve ses fondations dans des résultats profonds de topologie, de géométrie, de combinatoire et d'algèbre abstraite développés tout au long du 20^{ème} siècle (on peut citer, parmi tant d'autres, les travaux de Burnside, Dehn, Élie Cartan et Jakob Nielsen.) Encore aujourd'hui, elle est caractérisée par sa position à la croisée de ces différents domaines et produit des rapprochements parfois inattendus. Cette Introduction s'efforcera d'en restituer l'essence à travers l'étude des groupes d'automorphismes extérieurs.

Dans cette étude apparaît un objet crucial : l'*Outre-espace* d'un groupe libre, construit par Culler et Vogtmann en 1986 ([1]) qui présente des analogies à la fois avec l'*espace de Teichmüller* d'une surface (lié au groupe des difféotopies), et avec les *espaces symétriques* pour certains groupes linéaires. Nous présenterons les similitudes ces différentes constructions, quelques résultats associés et des développements toujours actifs.

2 Généralités sur les groupes d'automorphismes

Premières définitions. On se fixe un groupe G qu'on peut très bien imaginer dénombrable, voire de type fini.

On notera $Aut(G)$ son groupe d'automorphismes et $Inn(G)$ le sous-groupe des *automorphismes intérieurs*, de la forme $g \mapsto hgh^{-1}$ pour $h \in G$. Le groupe des *automorphismes extérieurs* de G est le quotient $Out(G) = Aut(G)/Inn(G)$.

Un espace topologique X est *asphérique* s'il est connexe par arcs et que tous ses groupes d'homotopie supérieurs $\pi_k(X)$, $k \geq 2$ sont triviaux. Un *espace classifiant* pour G , ou $K(G, 1)$, est un espace asphérique dont le groupe fondamental est isomorphe à G . Un CW-complexe classifiant existe pour tout G et présente des propriétés utiles de prolongement des applications (voir [2], section 1.B), en particulier un théorème du à Hurewicz (1.B8, *ibid.*) affirme l'unicité de cet espace à équivalence d'homotopie près. De plus, un $K(G, 1)$ offre une description de la *cohomologie* de G (voir section 2.3).

Toutes les actions de G qu'on considèrera seront par homéomorphismes sur un espace topologique X localement compact (souvent par isométries cellulaires sur

un CW-complexe métrique). On dit qu'une telle action est *libre* si tous ses stabilisateurs sont triviaux, et *proprement discontinue* si tout compact ne rencontre qu'un nombre fini de ses translatés. Une action libre et proprement discontinue induit un revêtement $X \rightarrow X/G$. Si de plus X est contractile, il s'agit du revêtement universel et X/G est classifiant pour G .

Enfin, un espace géodésique X est $CAT(0)$ si pour tout $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2) \in X^5$, $(y_1, y_2, y_3, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^5$ tel que

$$\begin{aligned} p_1 &\in [x_1, x_2], p_2 \in [x_2, x_3] \\ q_1 &\in [y_1, y_2], q_2 \in [y_2, y_3] \\ \forall i, j, d_X(x_i, x_j) &= d_{\mathbb{R}}(y_i, y_j) \\ \forall i, d_X(p_i, x_2) &= d_{\mathbb{R}}(q_i, y_2) \end{aligned}$$

on a $d_X(p_1, p_2) \leq d_{\mathbb{R}}(q_1, q_2)$ ¹. Cette condition géométrique de contrôle sur les triangles de X a de nombreuses conséquences, en particulier, un tel espace est *uniquement* géodésique et contractile. Un espace est dit *localement $CAT(0)$* si son revêtement universel est $CAT(0)$ (un tel espace est donc asphérique.) Dans certains cas, notamment celui des complexes cubiques, on peut vérifier si un espace est localement $CAT(0)$ par une méthode purement combinatoire. On renvoie le lecteur à [3], Partie II, pour plus de détails.

Exemples. Les exemples suivants sont à la base des différentes constructions que nous présenterons par la suite.

1. Le groupe \mathbb{Z}^n étant abélien, les automorphismes intérieurs sont triviaux donc on a l'identification $Out(\mathbb{Z}^n) \simeq Aut(\mathbb{Z}^n) \simeq GL(n, \mathbb{Z})$. Le tore $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n \simeq \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est un espace classifiant pour \mathbb{Z}^n .
2. Tout graphe (vu comme un CW-complexe de dimension 1) connexe par arcs non vide, avec s sommets et a arêtes, est classifiant pour le groupe libre à $a - s + 1$ générateurs, qu'on notera F_{a-s+1} , car le revêtement universel d'un tel graphe, étant un arbre, est contractile.
3. De même, la surface compacte orientable sans bord de genre $g > 0$, Σ_g , a \mathbb{R}^2 pour revêtement universel donc est également un espace classifiant pour son groupe fondamental.
4. Enfin, un *groupe d'Artin à angles droits* (ou *RAAG*) est défini par une présentation finie de la forme suivante, où V est un ensemble fini et E une partie symétrique de $V \times V$:

$$\langle V \mid \forall (v, w) \in E, vw = wv \rangle$$

On note ce groupe A_{Γ} où $\Gamma = (V, E)$ est un graphe simple fini non orienté dont le type d'isomorphisme encode celui de A_{Γ} .

On définit également le *complexe de Salvetti* associé \mathbb{S}_{Γ} comme le sous-complexe du tore $(\mathbb{S}^1)^V$ muni de sa structure cellulaire produit (où \mathbb{S}^1 comporte une arête et un sommet), où l'on garde exactement les cellules dont les arêtes du bord, identifiées à des éléments de V , commutent deux à deux dans A_{Γ} . Il s'agit d'un complexe cubique localement $CAT(0)$, donc classifiant pour son groupe fondamental, qui s'identifie canoniquement à A_{Γ} .

1. La notation $[a, b]$ dans X représente un segment géodésique fixé une fois pour toutes (dans le cas où l'espace n'est pas uniquement géodésique).

2.1 Principe de l'étude géométrique

Soit X un CW-complexe asphérique non vide, x un sommet de X et $G = \pi_1(X, x)$. Toute équivalence d'homotopie pointée $f: (X, x) \rightarrow (X, x)$ (d'inverse d'homotopie g) induit un automorphisme de groupe $f_*: G \rightarrow G$ (d'inverse g_*). Cet automorphisme induit ne dépend que de la classe d'homotopie de f . De plus tout automorphisme de G est induit par une telle équivalence d'homotopie et deux applications ont le même automorphisme induit si et seulement si elles sont homotopes (on utilise ici que X est asphérique.) Ainsi, on peut identifier $Aut(G)$ avec le groupe $hHeq_*((X, x), (X, x))$ des équivalences d'homotopies $(X, x) \rightarrow (X, x)$ modulo homotopie, muni de la composition.

Ce point de vue géométrique est la source de nombreux résultats, mais il est souvent plus agréable de travailler avec le groupe $hHeq(X, X)$ des équivalences non pointées modulo homotopie *libre* celui-ci est identifié de la même façon avec le groupe des automorphismes extérieurs $Out(G)$ (permettre au point base de se déplacer le long d'un lacet revient exactement à trivialisier la conjugaison par ce lacet dans le groupe fondamental.) On a plus exactement l'information sur les automorphismes, mais le noyau $Inn(G)$ est souvent bien maîtrisé (il s'identifie à $G/Z(G)$).

On a ainsi un action évidente par translation de $Out(G)$ sur $hHeq(X, X)$ puisque ces deux groupes sont en fait identifiés. Cette action est directement libre et transitive. Mais pour aller plus loin, on voudrait en quelque sorte interpoler entre les points de $hHeq(X, X)$ afin d'obtenir un espace topologique intéressant \mathcal{O} muni d'une action proprement discontinue de $Out(G)$ (il est souvent nécessaire d'introduire des stabilisateurs finis à ce stade, notamment si G possède des éléments de torsion, donc on a plus une action libre.) Si \mathcal{O} est contractile, il sera appelé *oultre-espace*² pour G .

Cette interpolation intervient différemment selon le groupe G considéré, il est notable que plusieurs cas font apparaître également les points de $hHeq(Y, X)$ pour Y un CW-complexe connexe par arcs homotopiquement équivalent à X , ce qui donne lieu à la définition cruciale suivante :

Définition. L'espace X étant fixé, soit Y un CW-complexe connexe par arcs homotopiquement équivalent à X . Un *marquage* de Y est une équivalence d'homotopie $Y \rightarrow X$.

On définit une *relation d'équivalence* sur les marquages comme engendrée par les deux relations suivantes :

- Deux marquages homotopes du même espace Y sont équivalents
- Pour Y et Y' deux espaces et $\varphi: Y \rightarrow Y'$ un isomorphisme cellulaire, tout marquage f de Y' est équivalent au marquage $f \circ \varphi$ de Y .

Remarquons qu'il peut donc exister deux marquages du même espace équivalents sans être homotopes, si cet espace admet un automorphisme cellulaire non homotope à l'identité.

Ensuite, pour espérer prouver au moins la connexité par arcs, il est nécessaire de bien contrôler l'action de $Out(G)$ sur l'espace ainsi construit. Ceci est d'autant plus facile qu'on possède un système de générateurs explicite pour $Out(G)$, ce sera donc une préoccupation importante pour l'étude³.

2. De l'anglais *outer space*, en référence aux *outer automorphisms*. Cette terminologie n'est pas parfaitement standard dans la littérature, et se limite pour l'instant à des cas particuliers.

3. Une action cocompacte et proprement discontinue sur un espace satisfaisant suffit à obtenir qu'un groupe est de type fini par le lemme de Svarc-Milnor, mais ne donne pas des générateurs très explicites, et ici on a besoin de bien connaître les générateurs à l'avance pour obtenir les propriétés de l'action.

Pour aller plus loin dans la description, il est préférable de se concentrer sur des exemples explicites. Avant d'arriver à cette partie de l'étude, on décrit cependant quelques propriétés qu'on peut espérer d'un groupe d'automorphismes extérieurs.

2.2 Classification des automorphismes

Étant donné une action proprement discontinue de $Out(G)$ par isométries sur un espace métrique géodésique localement compact X , on peut définir la *longueur de translation* :

$$\begin{aligned} \ell_X : Out(G) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \phi &\mapsto \inf_{x \in X} d_X(x, \phi(x)) \end{aligned}$$

On distingue alors trois types d'éléments :

- Un automorphisme ϕ est *elliptique* si $\ell_X(\phi) = 0$ et l'infimum est atteint, autrement dit, ϕ admet un point fixe x . Alors $\langle \phi \rangle \subset Stab(x)$ est fini, donc ϕ est d'ordre fini.
- Un automorphisme ϕ est *hyperbolique* (on lit parfois *loxodromique*) si $\ell_X(\phi) > 0$ et l'infimum est atteint. On définit alors l'*axe* de ϕ comme l'ensemble α_ϕ des points réalisant l'infimum. L'axe est stable par ϕ qui agit dessus par translation d'une distance de $\ell_X(\phi)$.
- Un automorphisme est *parabolique* si l'infimum n'est pas atteint.

Savoir dans quelle catégorie un élément se trouve est très utile pour comprendre son comportement. Le cas le plus naturel d'application de cette trichotomie est celui de $PSL_2(\mathbb{Z})$ agissant sur le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 , vu comme $\{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$. On a une notion naturelle de *bord* sur \mathbb{H}^2 , donnant une complétion $\overline{\mathbb{H}^2}$ homéomorphe au disque fermé⁴. Un élément de $PSL_2(\mathbb{Z})$ agit alors continûment sur ce disque : par le théorème de Brouwer, il existe un point fixe. Si ce point fixe est dans \mathbb{H}^2 , on a directement ellipticité. Si il y a exactement deux points fixes sur le bord $\overline{\mathbb{H}^2} \setminus \mathbb{H}^2$, on peut les relier par une géodésique fixe dans \mathbb{H} , et on obtient l'hyperbolicité, la géodésique faisant partie de l'axe. Si il y a exactement un point fixe, on trouve un phénomène similaire, où la géodésique est remplacée par un *horocycle* (limite d'une famille de sphères passant par un point fixé et dont les centres tendent vers l'infini), et l'élément est parabolique (on peut penser par exemple à $z \mapsto z + 1$ qui fixe uniquement le point à l'infini.) Enfin, si il y a au moins trois points fixes sur le bord, l'automorphisme est nécessairement l'identité. Par ailleurs si deux éléments hyperboliques fixent des points disjoints du bord, on peut appliquer le *lemme du ping-pong* (voir [4], chapitre 5) et obtenir que ces éléments ont des puissances qui engendrent un sous-groupe libre.

Ce cas particulier justifie bien qu'on cherche souvent à construire des bords sur un espace, mais tout ne se passe pas nécessairement aussi bien dans d'autres cas. On cherche cependant à obtenir un résultat de cette forme, car il nous renseigne sur la croissance des groupes d'automorphismes, et la dynamique des itérées d'un élément.

2.3 Dimension cohomologique virtuelle

Pour plus de détails sur cette section, on peut se référer à [5], notamment la Section VIII.

Si X est un CW-complexe classifiant pour un groupe G , on sait que X est entièrement déterminé à homotopie près. En partie les groupes d'homologie et

4. On rajoute au demi-plan supérieur un point à l'infini. On obtient la même construction en considérant le *bord visuel*, quotient de l'ensemble des demi-droites géodésiques.

de cohomologie de X (à coefficients dans un module M sur l'anneau $\mathbb{Z}G$) ne dépendent que de G . On les note $H_\bullet(G; M)$ et $H^\bullet(G; M)$. L'avantage de cette caractérisation par rapport à la définition purement algébrique est que le calcul de l'homologie de X est simplifié par sa structure cellulaire.

Définition. La *dimension cohomologique* de G est la borne supérieure des n tel qu'il existe un module M vérifiant $H^n(G; M) \neq \{0\}$. La version topologique de cette définition est, via la cohomologie cellulaire, la borne inférieure des n tel que G admette un CW-complexe classifiant de dimension n . Il est prouvé que ces deux définitions produisent la même valeur dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ sauf possiblement si la dimension algébrique vaut 2 et la dimension topologique vaut 3 (mais aucun contre-exemple n'est connu).

Cette définition simple a plusieurs avantages : par exemple, si H est un sous-groupe de G , on obtient un $K(H, 1)$ comme revêtement d'un $K(G, 1)$, donc la dimension cohomologique de H est majorée par celle de G . Cependant elle a un inconvénient majeur : la dimension cohomologique de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $+\infty$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi seul un groupe sans torsion peut espérer avoir une dimension cohomologique finie. Cependant un théorème de Serre (*ibid.*, VIII.3.1) motive la définition suivante :

Définition. Pour toute propriété en groupes P on dira que G est *virtuellement* P lorsque G admet un sous-groupe P d'indice fini (par exemple, les groupes finis sont virtuellement triviaux.)

Si G est virtuellement sans torsion, tous les sous-groupes d'indice fini sans torsion de G ont la même dimension cohomologique, qu'on notera $\text{vcd}(G)$, pour *dimension cohomologique virtuelle*.

Si $\text{vcd}(G) < +\infty$, on ne peut pas toujours construire un $K(G, 1)$ de dimension finie, mais on peut au moins construire un CW-complexe contractile X de dimension finie avec une action proprement discontinue de G , à partir du revêtement universel Y d'un $K(H, 1)$, où H est un sous-groupe d'indice fini de G sans torsion (il s'agit d'un produit de copies de Y indexées par les classes à gauche de H .) Un tel X est toujours de dimension au moins $\text{vcd}(G)$, mais la question de savoir si cette valeur est toujours atteinte reste ouverte.

On voit donc par ce procédé que la construction d'un outre-espace pour G muni d'une structure cellulaire nous donne une borne supérieure sur la dimension cohomologique virtuelle de $\text{Out}(G)$.

Il existe aussi une notion topologique plus fine *d'espace classifiant pour les actions propres* d'un groupe G : un espace X contractile avec une action proprement discontinue de G où pour tout sous-groupe fini H de G non trivial, l'ensemble des points fixes X^H est non vide et contractile. On peut espérer d'un outre-espace qu'il vérifie cette propriété mais ce n'est pas immédiat.

2.4 Autres propriétés

Sans les détailler, on cite ici quelques propriétés supplémentaires donnant lieu à des questions intéressantes, ouvertes dans de nombreux cas, sur les groupes d'automorphismes exétrieurs :

- L'existence d'éléments WPD (*weakly properly discontinuous*), en lien avec l'hyperbolicité acylindrique (voir [6])
- L'alternative de Tits, qui affirme que tous les sous-groupes non virtuellement résolubles d'un groupe contiennent une copie de F_2

- La propriété (T) de Kazhdan (voir [7]) qui donne des points fixes pour les actions sur certains espaces de Hilbert ou médians
- La décidabilité des problèmes combinatoires comme le problème du mot ou de conjugaison : étant donné un mot (respectivement, deux mots) sur l’alphabet d’un système de générateurs du groupe, existe-t-il un algorithme décidant si le mot représente l’élément neutre (resp. si les deux éléments représentés sont conjugués) ? La réponse ne dépend pas du système de générateurs choisi, mais soulève néanmoins la question de la détermination d’un système de générateurs agréable pour $Out(G)$.

3 Actions géométriques remarquables

Dans cette section, on se focalise notamment sur des exemples précis de groupes d’automorphismes extérieurs, notamment dans les cas d’un réseau de Lie, d’un groupe de surface et d’un groupe libre. Chaque exemple donne lieu à une théorie riche et unique.

3.1 Espaces symétriques

Les espaces symétriques ont été introduit et classifiés par Élie Cartan dans les années 1920 via la théorie des algèbres de Lie semi-simples. Ils entretiennent des liens forts avec les réseaux dans les groupes de Lie, objets d’étude importants en théorie géométrique des groupes.

Définition. Une *espace symétrique* est une variété riemannienne connexe M où pour tout point $x \in M$ il existe une isométrie involutive $\sigma_x : M \rightarrow M$ fixant x et dont l’application tangente en x est $-Id$.

On a comme exemples notables de cette définition la sphère \mathbb{S}^n (dite *de type compact*), l’espace euclidien \mathbb{R}^n et l’espace hyperbolique (*de type non-compact*) :

$$\mathbb{H}^n = \{(x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \mid x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = -1\}$$

La définition donne l’existence de suffisamment d’isométries pour que le groupe $Isom(M)$ agisse transitivement sur M , ainsi que la composante connexe de id , $G = Isom(M)_0$ (il suffit essentiellement pour envoyer x sur y de considérer σ_m où m est le milieu d’une géodésique reliant x à y .) En considérant un point $p \in M$, et $K \subset G$ son stabilisateur (qui est un sous-groupe compact si G a la topologie compact-ouverte), M s’identifie alors au quotient G/K appelé *espace homogène*. De plus la conjugaison par σ_p est un élément involutif de $Aut(G)$ fixant K point par point. On peut réciproquement munir tout quotient d’un groupe de Lie connexe G doté d’un sous-groupe compact et ouvert K et d’un automorphisme involutif fixant K d’une structure d’espace symétrique.

Les espaces symétriques ont été classifiés en détails par Élie Cartan selon leur courbure et la dimension maximale d’un sous-espace euclidien. L’intérêt de ces espaces dans le cadre de notre étude géométrique est l’action des réseaux du groupe de Lie G sur l’espace symétrique G/K . L’exemple crucial est le suivant (qui admet de nombreuses variantes complexes, symplectiques, etc. . .)

On considère l’espace $S_n^{++}(\mathbb{R})$ des matrices réelles symétriques définies positives de taille n . Il s’agit d’une variété comme ouvert de l’espace vectoriel $S_n(\mathbb{R})$, de dimension $n(n+1)/2$, ce dernier s’identifiant en tout point à l’espace tangent. Cette variété est munie d’une métrique riemannienne définie en I_n par

$X, Y \rightarrow Tr(XY)$, et d'une action de $GL_n(\mathbb{R})$ par la formule suivante :

$$A \cdot S = AS^tA$$

Cette action se restreint bien sûr en une action de $Out(\mathbb{Z}^n) = GL_n(\mathbb{Z})$. Le stabilisateur de I_n est $O_n(\mathbb{R})$, et l'action est transitive, donc $S_n^{++}(\mathbb{R})$ s'identifie au quotient $GL_n(\mathbb{R})/O_n(\mathbb{R})$ (qu'on obtient via la décomposition polaire). Les stabilisateurs de l'action de $GL_n(\mathbb{Z})$ sont inclus dans $O_n(\mathbb{R})$ donc finis, et on peut en déduire que cette action est proprement discontinue. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est par ailleurs convexe donc contractile : on obtient bien un outre-espace pour \mathbb{Z}^n ! Qui plus est, cet espace est une variété de dimension finie donc facilement manipulable.

On a comme structure additionnelle pour tout $S \in S_n^{++}$ une involution $T \mapsto ST^{-1}S$ fixant S et qui munit bien S_n^{++} d'une structure d'espace symétrique. De là, on peut déduire grâce à des techniques d'algèbres de Lie que l'espace S_n^{++} est $CAT(0)$ ⁵ (voir [3], Théorème II.10.39) ce qui fournit des outils d'essence géométrique pour l'étude de l'action de $Out(\mathbb{Z}^n)$ ⁶.

Le groupe \mathbb{Z}^n est naturellement un RAAG, on verra donc plus tard une autre construction d'outre-espace plus générale le concernant, mais produisant en réalité un espace symétrique de la même nature dans ce cas particulier.

Notons que $VCD(\mathbb{Z}^n) = n(n-1)/2$ d'après un résultat de Borel et Serre ([8]).

3.2 Espace de Teichmüller et groupe des difféotopies (*Mapping Class Group*)

Le groupe des difféotopies a été étudié dans les années 1920 par Max Dehn. Il est impossible de détailler ici la richesse de la théorie sous-jacente mais nous renvoyons le lecteur à [9] pour un traitement du sujet en profondeur.

On rappelle qu'on écrit Σ_g pour la surface fermée orientable de genre g , c'est à dire le "tore à g trous", $g \in \mathbb{N}$. On note $\Sigma_{g,n}$ pour la même surface percée n fois, c'est-à-dire à laquelle on a ôté n points distincts⁷.

Définition. Une *difféotopie* d'une telle surface Σ (ou *mapping class*) est un élément du groupe quotient :

$$Mod(\Sigma) = \text{Homeo}^+(\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma) = \text{Diffeo}^+(\Sigma)/\text{Diffeo}_0(\Sigma)$$

c'est à dire une classe d'équivalence modulo homotopie (ou isotopie) d'homéomorphismes (ou difféomorphismes) de Σ dans elle-même préservant l'orientation. $Mod(\Sigma)$ est appelé *mapping class group* associé à Σ .

Une métrique riemannienne sur une surface Σ est dite *hyperbolique* si elle est localement isométrique à la métrique usuelle de \mathbb{H}^2 . À part \mathbb{H}^2 lui-même, les principaux exemples sont ses quotients par un sous-groupe d'isométries : Σ_g pour $g \geq 2$.

L'*espace de Teichmüller* de Σ est l'ensemble quotient $Teich(\Sigma)$ des métriques hyperboliques sur l'espace Σ , modulo isotopie. Si $g \geq 2$ et $n = 0$, $Teich(\Sigma)$ s'identifie à deux autres constructions :

5. Ce n'est pas aussi évident pour notre métrique riemannienne que pour la métrique induite de $S_n(\mathbb{R})$.

6. Dans une certaine mesure, cet exemple est générique : un théorème cité par Bridson et Haefliger affirme qu'un espace symétrique simplement connexe de courbure négative (type non-compact) se plonge géodésiquement dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ pour un certain n , à certaines dilatations des longueurs près.

7. Il est également possible d'introduire un bord, une difféotopie devra alors fixer le bord point par point.

- l'ensemble des surfaces de Riemann homéomorphes à Σ modulo isomorphisme
- l'ensemble des représentations discrètes fidèles de $\pi_1(\Sigma)$ dans $PSL_2(\mathbb{R})$ modulo conjugaison par $PGL_2(\mathbb{R})$. En effet, $\pi_1(\Sigma)$ agit par isométries sur le revêtement universel de Σ , qui s'identifie au plan hyperbolique et dont le groupe d'isométries positives est $PSL_2(\mathbb{R})$.

Cette dernière identification dote $Teich(\Sigma)$ d'une topologie compacte-ouverte, qui est en fait induite par la *métrique de Teichmüller* (voir [9], Section 11.8).

Enfin, $Mod(\Sigma)$ agit sur $Teich(\Sigma)$ car le tiré en arrière d'une métrique hyperbolique par un difféomorphisme reste hyperbolique. Le quotient $\mathcal{M}(\Sigma)$ est l'*espace de modules* de Σ . Cette action est proprement discontinue, et l'espace de Teichmüller est contractile.

Le lien étroit entre cette construction et les groupes d'automorphismes extérieurs se voit *via* le théorème de Dehn-Nielsen-Baer, qui affirme que les groupes $Mod^\pm(\Sigma_g)$ et $Out(\pi_1(\Sigma_g))$ sont isomorphes (où le symbole \pm indique qu'on considère également les homéomorphismes renversant l'orientation)⁸. Il est clair qu'un élément de $Mod^\pm(\Sigma_g)$ correspond bien à une équivalence d'homotopie sur l'espace asphérique Σ_g , mais l'injectivité et surtout la surjectivité du morphisme de groupes obtenu sont plus délicates. Ainsi, l'espace des modules de Σ_g n'est pas exactement un outre-espace pour $\pi_1(\Sigma_g)$, à un sous-groupe d'indice 2 près, mais cela suffit pour de nombreuses applications (notamment sur les questions de VCD).

Enfin, on présente deux théorèmes importants sur la structure de $Mod(\Sigma)$, grâce à quelques définitions.

Définition. Un *lacet simple essentiel* est une injection de S^1 dans Σ qui n'est pas homotope à une constante. Il est *séparant* si ôter son image déconnecte Σ . Deux lacets simples essentiels sont dit *disjoints* si leurs images le sont⁹.

Une difféotopie est *réductible* si elle préserve une famille de (classes d'homotopies de) lacets simples essentiels deux à deux disjoints. Elle est *périodique* si elle est d'ordre fini dans $Mod(\Sigma)$ (il n'y a aucune implication entre les deux.)

Un *feuilletage* de Σ est une partition de Σ en *feuillettes*, tel qu'il existe une carte au voisinage de tout point qui envoie chaque feuillet sur des droites horizontales dans \mathbb{R}^2 (et des changements de cartes préservant l'horizontalité.) Un *feuilletage singulier* de Σ est un feuilletage de Σ privée d'un nombre fini de points appelés *singularités*, avec une condition sur le comportement des feuillettes au voisinage de chaque singularité (et chaque point où la surface est percée). On est obligé d'introduire ces singularités car il n'existe pas de feuilletage non singulier sur une surface de genre au moins 2 (pour des raisons de caractéristique d'Euler). Un feuilletage singulier est dit *mesuré* lorsqu'on dispose d'une *mesure transverse* aux feuillettes (c'est-à-dire invariante par translations horizontales dans les cartes.)

Voici deux exemples fondamentaux de difféotopies :

- Un *twist de Dehn* autour d'un lacet simple essentiel non séparant a consiste à couper Σ le long de a , créant ainsi un bord formé de deux cercles, appliquer une rotation d'un tour complet à l'un des cercles, puis les recoller.

8. Il existe également une formulation pour une surface percée, mais avec seulement le sous-groupe des automorphismes extérieurs qui préservent les lacets entourant les points ôtés.

9. Une subtilité ici est qu'on considère généralement les lacets à isotopie près, ce qui peut changer leur nombre d'intersections. Cependant, pour une surface non percée, quitte à effectuer une isotopie sur chacun, on peut supposer tous nos lacets simples plongés géodésiquement, et alors le nombre d'intersection est toujours minimal.

- Un *pseudo-Anosov* est un homéomorphisme préservant deux feuilletages singuliers mesurés transverses en tout point sur Σ , appelés *stable* et *instable*, qui dilate la mesure transverse au feuilletage instable d'un facteur $\lambda > 1$ et contracte la mesure transverse au feuilletage stable d'un facteur $1/\lambda$.

Par exemple dans le cas $\Sigma = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, les éléments de $SL_2(\mathbb{Z})$ suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

agissent respectivement par un twist de Dehn (le long du lacet quotient de l'axe horizontal de \mathbb{R}^2) et un pseudo-Anosov avec $\lambda > 1$ valeur propre de B , les deux feuilletages étant obtenus par quotient des familles de droites dirigées par les vecteurs propres de B ¹⁰.

On peut à présent énoncer le théorème de Dehn-Lickorish : $Mod(\Sigma_{g,n})$ est engendré par une famille finie de twists de Dehn le long de lacets simples essentiels non séparants. En particulier, ce groupe est de type fini.

Le théorème de classification de Nielsen-Thurston affirme quant à lui que les difféotopies irréductibles non périodiques de $\Sigma_{g,n}$ sont précisément les pseudo-Anosov. En conséquence, étant donnée une difféotopie non périodique ϕ , on peut découper Σ le long d'une famille de courbes disjointes deux à deux et stables telles que ϕ agira sur chaque composante connexe soit par un twist de Dehn soit par un pseudo-Anosov.

Les preuves de ces deux théorèmes utilisent des outils puissants : pour le premier, on construit une sorte de version discrète de $Teich(\Sigma)$ appelée le *complexe de lacets* (*curve complex* en anglais) pour étudier l'action d'une difféotopie sur ce complexe. Dans le deuxième cas, la preuve due à Bers utilise le comportement dynamique des difféotopies sur l'espace de Teichmüller et sa frontière, en introduisant la notion importante de *train tracks*, qui apparaîtra plus tard également pour $Out(F_n)$ [20].

Utilisant des méthodes analogues à celles de Borel et Serre, Harer ([10]) a construit un sous-espace de l'espace de Teichmüller lui permettant de calculer la dimension cohomologique virtuelle du groupe des difféotopies de $\Sigma_{g,n}$, qui vaut $4g + n - 4$ si $g, n > 0$, $4g - 5$ si $g > 0, n = 0$ et $n - 3$ si $g = 0, n > 0$.

3.3 Outre-espace pour les groupes libres et plus

L'article [1] de 1986 dû à Culler et Vogtmann présente en détail la construction d'un outre-espace CV_n pour le groupe F_n , $n \geq 2$. Les idées sous-jacentes ont produit diverses généralisations dans les années suivantes et jusque très récemment ([13] construit un analogue relatif de l'outre-espace pour un produit libre de groupes quelconques, [15],[16] construisent en 2020 un outre-espace pour les RAAGs.) Nous décrivons dans les grandes lignes la construction de CV_n , le point le plus délicat étant la preuve de sa contractilité.

Tout d'abord, afin de mieux comprendre l'action de $Out(F_n)$ et la structure de CV_n , un outil utile est le système de générateurs obtenu par Nielsen dans [11] et qui portent son nom. Ce système comporte :

- les permutations entre générateurs
- l'inversion d'un générateur

10. Dans ce cas, il s'agit même d'un *difféomorphisme d'Anosov linéaire*, qui a inspiré la définition généralisée à toute surface.

- une transvection, notée $v \mapsto wv$, autrement dit le générateur v est multiplié par le générateur distinct w , et tous les autres générateurs (y compris w) sont laissés fixes¹¹.

Pour le groupe F_n , on a une famille de CW-complexes classifiants très simples, à savoir les graphes connexes (V, E) vérifiant $|E| - |V| = n - 1$. On autorise les multi-arêtes et les boucles (autrement dit E est une famille d'éléments de V^2), mais, notre intérêt étant l'espace topologique sous-jacent, on interdit les sommets de valence 1 ou 2 (dans un cas on pourrait écraser le sommet et son arête, et dans l'autre simplement supprimer le sommet.) On note R_n la n -rose, c'est à dire le graphe à 1 sommet et n arêtes, qui sera notre classifiant privilégié. Ainsi un marquage d'un graphe admissible X est une équivalence d'homotopie $X \rightarrow R_n$ (voir section 2.1).

Définition. L'outre-espace pour F_n est l'ensemble CV_n des classes d'équivalences $[X, m]$ où X est un graphe admissible métrique (chaque arête est dotée d'une longueur dans \mathbb{R}_+^* , m est un marquage $X \rightarrow R_n$, et (X, m) et (X', m') sont équivalents si il existe $f: X \rightarrow X'$ cellulaire, isométrie à un facteur constant de dilatation près, et telle que $m' \circ f$ et m sont homotopes.

$Out(F_n)$, identifié à $hHeq(R_n, R_n)$ agit sur CV_n par post-composition au marquage : $f \cdot [X, m] = [X, f \circ m]$. De plus, si f stabilise $[X, m]$, il existe une isométrie cellulaire $g: X \rightarrow X$ tel que $m \circ g$ et $f \circ m$ sont homotopes, ce qui borne le nombre de classes d'homotopies possibles pour f (par le nombre d'automorphismes du graphe fini X) : les stabilisateurs de l'action sont finis.

L'avantage de cette construction est qu'elle offre une façon claire de changer la topologie d'un graphe : via contraction et dilatation des arêtes, en faisant tendre la longueur d'une d'entre elles vers 0 par exemple. Ceci est néanmoins impossible pour une boucle. Ainsi étant donné un point $[X, m]$ de CV_n on peut définir la *cellule* de $[X, m]$ comme l'ensemble des points obtenus en affectant des longueurs dans \mathbb{R}_+ aux arêtes (ce qui revient à écraser certaines arêtes) sans modifier le type d'homotopie. Cette famille de points s'identifie à une partie du simplexe fermé Δ^{m-1} contenant l'intérieur Δ^{m-1} , où m est le nombre d'arêtes de x (à un point on associe le m -uplet projectif de ses longueurs d'arêtes.) CV_n est alors obtenu en recollant ces cellules selon des faces communes (plusieurs écrasements d'arête peuvent produire le même graphe), d'où l'expression «complexe simplicial à faces manquantes». La topologie CW sur ce complexe donne une topologie à CV_n .

L'action de $Out(F_n)$ sur cet espace est proprement discontinue, et c'est ainsi qu'on obtient un outre-espace pour F_n . Par ailleurs, la dimension maximale d'une cellule est majorée par le nombre d'arêtes maximal dans un graphe admissible moins 1, à savoir $3n - 4$, donc on obtient cette borne sur $VCD(Out(F_n))$. En réalité l'article original fait mieux en introduisant l'*épine* de CV_n , un complexe simplicial contenu dans la subdivision barycentrique de CV_n et sur lequel ce dernier se rétracte. Cette épine est de dimension $2n - 3$ et conserve les propriétés d'outre-espace, donc $VCD(Out(F_n)) \leq 2n - 3$ car $Out(F_n)$ contient un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^{2n-3} (engendré par des transvections) donc sa cohomologie virtuelle en degré $2n - 3$ doit être non-triviale.

La preuve de contractilité repose sur de nombreux lemmes combinatoires, et une récurrence subtile grâce à un bon ordre sur les n -roses marquées, et des arguments de «réduction de pic».

11. Il existe également un autre système de générateurs important à la preuve dont les éléments sont appelés *automorphismes de Whitehead*.

Deux approches de généralisation se profilent ensuite. La première est de remplacer les graphes par des graphes de groupes (à groupes d'arêtes triviaux)¹². On obtient alors un groupe de la forme $G = G_1 * \cdots * G_k * F_n$ où les G_i sont les groupes de sommets, et F_n est le groupe fondamental du graphe. Ce groupe possède des automorphismes au comportement très mal contrôlé (tous les groupes de type fini peuvent s'écrire de la sorte.) Cependant, si l'on considère seulement le sous-groupe de Fouxé-Rabinovitch $FR(G)$ des (classes des) automorphismes qui agissent par conjugaison sur chacun des G_i , le comportement rejoint le cas du groupe libre et l'on est capable de construire un «outre-espace relatif» avec action de $FR(G)$ (voir [13] et [14]).

L'autre approche est de simplement chercher d'autres groupes avec une famille souple mais simple de classifiants. Le premier exemple naturel après les groupes libres est celui des RAAGs, qui forment une sorte d'interpolation entre F_n et \mathbb{Z}^n . En particulier, leurs outre-espaces doivent comporter des caractéristiques héritées à la fois de CV_n et de l'espace symétrique $GL_n(\mathbb{R})/O_n(\mathbb{R})$. Cette construction a été produite par Bregman, Charney, Stambaugh et Vogtmann très récemment ([15], [16]), en se basant sur une généralisation du système de générateurs de Nielsen ([17], [18]). Des difficultés supplémentaires apparaissent en plus de l'ajout de dimensions dans les objets à traiter (qui deviennent des complexes cubiques de courbure négative). La principale est de concilier les automorphismes agissant comme des twists de Dehn (les transvections $v \rightarrow vw$ quand v et w commutent) aux autres automorphismes (les transvections où v et w ne commutent pas par exemple, appelées *pliages*). Cette conciliation est d'ailleurs tout l'objet de [16]. Elle nécessite assez naturellement d'introduire des complexes cubiques gauches, où la métrique sur les cellules est celle d'un paralléloèdre et plus d'un cube, mais également d'oublier la structure cellulaire : les points de l'outre-espace ne seront finalement que des espaces métriques localement CAT(0) marqués à équivalence près, provenant chacun d'un complexe gauche non spécifié. À part cette complication et la plus grande technicité de la combinatoire, le schéma de preuve suit le même déroulement que dans le cas de CV_n .

Très récemment également, des méthodes analogues ont fourni un calcul de la dimension cohomologique virtuelle d'un RAAG dans [19].

4 Quelques perspectives

La théorie des *train tracks*, initialement conçue pour le Mapping Class Group, a permis d'obtenir des résultats pour $Out(F_n)$ suite à l'adaptation de Bestvina et Handel [20]. Cependant à ce jour, on ne dispose pas d'une construction analogue pour le cas des RAAGs, bien que certains résultats de pliage comme [21] suggèrent que la méthode pourrait s'adapter. On ne connaît pas non plus pour les RAAGs d'espace classifiant atteignant la dimension cohomologique exacte (elle est calculée par des méthodes algébriques).

Dans la lignée des autres généralisation du cas de $Out(F_n)$, on ignore s'il existe une construction d'outre-espaces relatifs allant au-delà du produit libre (produits graphés, graphes de groupes avec groupes d'arêtes).

On connaît également certaines informations sur les stabilisateurs des parties de G dans $Out(G)$ pour $G = F_n$ ([22]), mais cette étude est loin d'être complète et générale. On ne sait pas non plus décider par un algorithme si deux éléments de $Out(F_n)$ sont conjugués ou non.

12. Ces objets sont décrits par la théorie de Bass-Serre, voir [12].

Du côté du Mapping Class Group, une large part des développements actuels porte sur les difféotopies des surfaces de genre infini, qui recèlent une complexité encore plus poussée. Il existe également une théorie initiée par Hatcher et Vogtmann ([23]) de l'*autre-espace* pour le groupe $Aut(G)$ et non $Out(G)$, encore peu développée pour le moment.

Dans l'ensemble, notre connaissance du domaine fait apparaître des liens forts entre les différentes variations sur le même concept présentées ici, mais de nombreux résultats restent à étudier, transposer ou reformuler entre les différents aspects de la théorie.

Références

- [1] M. Culler and K. Vogtmann, *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*, Invent. Math. 84 (1986), no. 1, 91-119.
- [2] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).
- [3] M. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer-Verlag (1999).
- [4] M. Clay and D. Margalit, *Office hours with a Geometric Group Theorist*, Princeton Univ. Press (2017).
- [5] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics 87 (1982).
- [6] D. Osin, *Acylindrically hyperbolic groups*, Trans. Am. Math. Soc. 368 no. 2 (2016), 851–888
- [7] B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette, *Kazhdan's Property (T)*, Cambridge University Press (2008).
- [8] A. Borel and J.-P. Serre, *Corners and arithmetic groups*, Comment. Math. Helv. 48 (1973), 436–491.
- [9] B. Farb and D. Margalit, *A Primer in Mapping Class Groups*, Princeton University Press (2012).
- [10] J. Harer, *The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. 84 (1986), 157-176.
- [11] J. Nielsen, *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen*, Math. Ann. 91 (1924), 169–209.
- [12] J.-P. Serre, avec H. Bass, *Arbres, Amalgames, SL_2* , Soc. Math. Fra. (1977).
- [13] V. Guirardel and G. Levitt, *The outer space of a free product*, Proc. Lond. Math. Soc. 94 no. 3 (2007), 695-714.
- [14] V. Guirardel and G. Levitt, *Deformation spaces of trees*, Groups, Geometry, and Dynamics 1 (2007), no. 2, 135-181.
- [15] R. Charney, N. Stambaugh, K. Vogtmann, *Outer space for untwisted automorphisms of right-angled Artin groups*, Geom. Topol. 21 (2017), no. 2, 1131-1178.
- [16] C. Bregman, R. Charney, K. Vogtmann, *Outer space for RAAGs*, preprint (2020), arXiv :2007.09725.
- [17] M. Laurence, *A generating set for the automorphism group of a graph group*, J. London Math. Soc. 52 (1995), no. 2, 318–334.
- [18] H. Servatius *Automorphisms of graph groups*, J. of Algebra 126 (1989), no. 1, 34-60.

- [19] M. Day, A. Sale, R. Wade, *Calculating the virtual cohomological dimension of the automorphism group of a RAAG*, Bull. London Math. Soc. 53 (2021), 259–273.
- [20] M. Bestvina, *A Bers-like proof of the existence of train tracks for free group automorphisms*, Fundamenta Mathematicae 214 (2010).
- [21] B. Beeker, N. Lazarovich, *Stallings folds for $CAT(0)$ cube complexes and quasiconvex subgroups*, preprint (2017). arXiv :1605.02758
- [22] M. Bestvina, M. Feighn, M. Handel, *A McCool Whitehead type theorem for finitely generated subgroups of $Out(F_n)$* , preprint (2020). arXiv :2009.10052
- [23] A. Hatcher and K. Vogtmann, *Cerf theory for graphs*, J. London Math. Soc. 58 (1998), no. 3, 633–655.